OR RefCard II 2011

1 Distribución Exponencial y Procesos de Poisson

1. Propiedades de la distribución Exponencial

   (a) $X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$;
   $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$;
   $E[X] = \frac{1}{\lambda}$; $Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

   (b) Perdida de memoria:
   $P(X > s + t | X > t) = P(X > s), \forall s, t \geq 0 \equiv$
   $P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t)$

   (c) Reproductividad: $X_i \sim Exp(\lambda), \forall i$ iid,
   $t = \sum_1^n X_i \sim \Gamma(p = n, a = \lambda)$, $(f(t) = e^{\lambda t} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!})$

   (d) Mínimo: $X_i \sim Exp(\lambda_i), \forall i$, $X = \{X_1, \ldots, X_n\} \sim Exp(\sum_1^n \lambda_i)$

   (e) Orden: $X_1 \sim Exp(\lambda_1), X_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

2. Procesos de Poisson

   (a) Procesos de conteo (Pc):

      i. $\{N(t), t \geq 0\}$: $N(t) \geq 0$, $N(t) \in Z$, $s < t \rightarrow N(s) \leq N(t)$,
      $s < t, N(t) - N(s) \sim$ eventos durante (s, t)

      ii. Pc incr's indep: $(t_1, t_2) \cap (t_3, t_4) = \phi$,
      Indep $(N(t_2) - N(t_1), (N(t_4) - N(t_3))$

      iii. Pc incr's estac:
      $N(t_2 + s) - N(t_1 + s) \sim N(t_1) - N(t_2), \forall t_1 < t - 2, s \geq 0$

   (b) Procesos de Poisson (PP),
   $\{N(t), t \geq 0\}$ PP de tasa $\lambda > 0$: $N(0) = 0$,

      i. Pc incr's indep,
      $P(N(t + s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$

      ii. Pc incr's indep y estac, $P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$,
      $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$, $P(N(h) \geq 2) = o(h)$

      iii. Tiempo entre llegadas consecutivas $T_n \sim Exp(\lambda)$ iid,
      $S_n = \sum_1^n T_i \sim \Gamma(P = n, a = \lambda)$

   (c) Partición de un PP: $\{N(t), t \geq 0\}$ PP de tasa $\lambda > 0$,
   clases $\{A, B\} : P(A) = p, P(B) = 1 - p, N(t) = N_1(t) + N_2(t)$
   $\{N_1(t), t \geq 0\}$ y $\{N_2(t), t \geq 0\}$
   son PP indep de tasas λp y $\lambda(1 - p)$

   (d) Mezcla de PP: $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$,
   $N_i(t)$ PP indep de tasa λ_i, $\{N(t), t \geq 0\}$ PP de tasa $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$
   $P(S_n^1 < S_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} (\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k (\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n+m-1-k}$

   (e) Distribución condicionada de tiempos de llegadas:

$P(T_1 < s|N(t) = 1) = \frac{s}{t}$

(f) Estadísticos de orden $Y_{(k)}$ de n variables aleatorias $\{Y_k\}_{i=1}^n$:
$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n!\Pi_{i=1}^n f(y_i)$, si $\{Y_k\}_{i=1}^n$ iid y
con $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$
$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{n!}{t^n}$, si $\{Y_k\}_{i=1}^n$ iid $\sim U(0,t)$ y
con $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < t$
$N(t) = n$, $S_1, S_2, \ldots, S_n \sim f(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) =$
$\frac{n!}{t^n}, 0 < s_1 < \ldots < s_n < t$

3. Procesos de Poisson no Homogéneos,
$\{N(t), t \geq 0\}$ Pc de tasa $\lambda(t), t > 0$ es un PP no homogéneo:

(a) $N(0) = 0$, Pc incr's indep, $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$,
$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

(b) Función valor medio del proceso: $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$

(c) $P(N(t+s) - N(t) = n = e^{-(m(t+s)-m(t))} \frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}, n \geq 0)$

4. Procesos de Poisson Compuestos: $X(t), t \geq 0$,

(a) $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, $\{N(t), t \geq 0\}$ PP de tasa $\lambda > 0$,
Y_i iid indep de $\{N(t), t \geq 0\}$.

(b) $E[X(t)] = \lambda t E[Y_1]$, $E[X(t)|N(t) = n] = nE[Y_1]$

(c) $Var(X(t)) = \lambda t E[Y_1^2]^2$, $Var(X(t)|N(t) = n) = nVar(Y_1)$

References

[1] Ríos-Insua, S., Mateos-Caballero, A., Bielza, C., Jimenez-Martín, A. (2004), Investigación Operativa. Modelos determinísticos y estocásticos Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.